ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« L'Afrique doit donc inventer son développement, et ne plus penser que l'aide est la solution idoine. » Que pensez-vous de cette citation de Dambisa Moyo, économiste d'origine zambienne, tirée de son livre L'Aide fatale, paru en 2009.

Sujet n° 2

« Il n'y a de révolution sociale véritable que lorsque la femme est libérée. Que jamais mes yeux ne voient une société où la moitié du peuple est maintenue dans le silence. » Thomas Sankara, 8 mars 1987, homme politique burkinabé anti-impérialiste. Que pensez-vous de cette affirmation ? Vous illustrerez votre propos.

Sujet n° 3

Selon vous quels sont les liens entre le développement économique d'un pays et son développement social et la démocratie ? Vous illustrerez votre argumentaire.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Etant donné un nombre réel positif r, on note $D(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ et $\bar{D}(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$, où $|z|$ est le module de z.

On appelle *série entière* associée à la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute série de fonction de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, où z est une variable complexe. On rappelle le lemme suivant :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entiere, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors

(i) Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(ii) Pour tout nombre réel r tel que $0 < r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\bar{D}(r)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est alors défini par

$$R = \sup\{r \geq 0, \text{ la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée } \}.$$

On appelle alors *disque de convergence* le disque $D(R)$.

Le but du problème est d'étudier sur quelques exemples le comportement d'une série entière au voisinage du cercle $C(R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ lorsque $R < +\infty$.

1.1 Préliminaires

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque $D(1)$. On fixe $\theta_0 \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \quad z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

On note de plus $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1. En remarquant que $a_n = R_{n-1} - R_n$, montrer que pour tout $z \in D(1)$,
$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$
2. Soit $z \in \Delta$. On note $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$. Montrer que
$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}.$$
3. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in D(1)$
$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$
4. Déduire des questions précédentes que
$$\lim_{z \to 1, z \in \Delta} f(z) = S.$$
5. **Application :** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

1.2 Un théorème Taubérien

Le but des questions suivantes est d'établir une réciproque partielle du résultat précédent.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Pour $x \in]-1, 1[$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x \to 1, x < 1} f(x) = S.$$

6. Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $(1 - x^k) \leq k(1-x)$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]0, 1[$,
$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k.$$

8. Justifier que le réel $M = \sup\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq (M+1)\varepsilon.$$

9. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

1.3 Un exemple de comportement sur le cercle $C(1)$

On considère dans cette partie la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} z^n$$

où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du nombre x. Le but est de montrer que cette série est convergente en tout point du cercle $C(1)$ mais qu'elle n'est nulle part absolument convergente.

10. Dans cette question, on considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On pose $\sigma_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

   (a) On suppose que la suite (σ_n) est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Justifier que

   $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n$$

   et en déduire que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

   (b) On suppose que la suite $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|\sqrt{n}$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} b_n = 0$. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

11. (a) Etablir que pour tout entier naturel impair p, on a

   $$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2.$$

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé et N_0 le plus grand entier tel que $(2N_0+1)^2 \leq N$. Montrer que

   $$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2N_0.$$

   (c) Etablir :

   $$\left|\sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq 8(N_0+1).$$

(d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ est une série convergente.

12. Dans cette question, θ est un nombre réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$.
    (a) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est bornée.
    (b) Montrer que la série $\sum |c_n - c_{n+1}|$ avec $c_n = \dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.
    (c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} e^{in\theta}$ est convergente.
13. Conclure.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on cherche à étudier des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par une formule de récurrence linéaire afin de trouver une formule simple donnant u_n en fonction de n.

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si μ est une valeur propre d'une matrice M de taille $n \times n$, on note E_μ le sous-espace propre de $\mathbb{R}^n$ associé à la valeur propre μ, c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire $M - \mu I_n$ où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Ainsi

$$E_\mu = \{x \in R^n : Mx = \mu x\} = Ker(M - \mu I_n).$$

2.1 Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite réelle récurrente d'ordre 2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0, \\ u_1 & = & 1, \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'on peut écrire la relation $(\star)$ sous la forme

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = M\, U_n,$$

où M est l'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dira que M est la matrice de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Calculer les valeurs propres de la matrice M.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de la matrice M.
5. Identifier une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$D = P^{-1}MP. \tag{1}$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$M^nP = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ a^{n+1} & b^{n+1} \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels à déterminer.

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule suivante :

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\ 2^n}.$$

8. En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.

2.2 Suite récurrente d'ordre p

Dans cette partie, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une récurrence d'ordre p de la forme :

$$v_{n+p} = \mu_0 v_n + \mu_1 v_{n+1} + \cdots + \mu_{p-1} v_{n+p-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

où $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$. De plus, on se donne une condition initiale pour les p premiers éléments de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme

$$v_0 = v^0, v_1 = v^1, \ldots, v_p = v^p, \tag{3}$$

où $(v^0, \ldots, v^p)$ est une autre famille de réels fixée.
Une telle suite possède également une matrice de récurrence $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = M\ V_n,$$

avec $V_n = (v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+p-1})^t$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$.

9. Montrer que la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

10. Déterminer le polynôme caractéristique (noté χ_M) de la matrice M.

11. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,p} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & \cdots & t_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{p-1,p-1} & t_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{p,p} \end{pmatrix},$$

où les $t_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$, telles que

$$T = P^{-1}MP. \tag{4}$$

12. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$V_n = PT^nP^{-1}V_0.$$

2.3 Diagonalisation

On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

où on rappelle que $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$.

13. Montrer qu'il existe un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 qui soit colinéaire à un vecteur de la forme

$$(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{p-1}).$$

14. Montrer que la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ suivante

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_1 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

est de rang supérieur ou égal à $p-1$.

15. En déduire que les sous-espaces propres de la matrice M sont tous de dimension 1, c'est-à-dire

$$\text{Pour tout } i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \dim(E_{\lambda_i}) = 1.$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes. Et on note D la matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

16. Montrer qu'il existe une matrice de passage P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_p \\ \nu_1^2 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \nu_1^{p-1} & \nu_2^{p-1} & \cdots & \nu_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

avec $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ une famille de réels à déterminer telle que $D = P^{-1}MP$.

17. **Application :** Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 0, \\ a_1 & = & 1, \\ a_2 & = & 0, \\ a_{n+3} & = & a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & 0, \\ b_1 & = & 0, \\ b_2 & = & 1, \\ b_{n+3} & = & b_{n+2} - b_{n+1} + b_n \end{array} \right. \tag{5}$$

vérifient $a_n = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i}$ et $b_n = \dfrac{1 - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}$ où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière du nombre $n/2$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} n\,u_n$

2. Donner un exemple de suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge, mais telle que la suite de terme général $n\,u_n$ ne tende pas vers zéro.

3. Soit σ une application injective de N^* (ensemble des entiers naturels non nuls) dans lui-même. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice n° 2

1. Montrer que pour tout x nombre réel, on a : $1+x \le e^x$

2. Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = (1+k)(1+k^2)+...+(1+k^n)\text{, pour } n \in N^* \text{ et pour } 0 \le k < 1$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,Ln(k)}$ (cette question est indépendante des deux précédentes)

Exercice n° 3

1. Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ n nombres réels et $A = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & a_0 \\ 1 & . & . & . & a_1 \\ 0 & . & . & . & . \\ ... & . & . & 0 & . \\ 0 & ... & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice carrée d'ordre n (elle présente des 1 sur la sous diagonale, les a_i sur la dernière colonne et partout ailleurs des zéros). Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. Trouver une matrice carrée A d'ordre 4 qui vérifie l'équation : $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$

Exercice n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3, il existe un unique vecteur y de R^3 qui vérifie :

$$Det(x_1, x_2, z) = y.z, \ \forall z \in R^3$$

Où $y.z$ désigne le produit scalaire euclidien de ces deux vecteurs et Det le déterminant. Le vecteur y s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2 et on note $y = x_1 \wedge x_2$.

1. Calculer dans une base orthonormée de R^3, les composantes de y en fonction de celles de x_1 et x_2.

2. On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme u de R^3 défini par : $u(x) = x \wedge w$

- Vérifier que $(x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$

- Montrer qu'il existe un réel k tel que : $u^3 = ku$

- En déduire les valeurs propres réelles de u et les sous espaces propres associés.

3. Pour tout réel α, on note φ_α l'application définie sur R^3 par : $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$

- Montrer que φ_α est une bijection de R^3

- Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

- En déduire l'expression de l'application réciproque de φ_α en fonction de α et u.

Exercice n° 5

Les deux questions sont indépendantes. R_+^* désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et C^k les fonctions k fois continûment dérivables.

1. Soit $f \in C^2(R_+^*, R)$ telle qu'il existe $l = \lim_{x \to 0} f(x)$ et que dans un voisinage de zéro, $f''(x) \geq -\frac{p}{x^2}$, où p est une constante positive. Déterminer $\lim_{x \to 0} x\, f'(x)$

2. Soit $f \in C^5(R, R)$ une fonction impaire qui vérifie :

(1) $f(0) = 0$

(2) $\exists M > 0, \forall x \in R, \left| f^{(5)}(x) \right| \leq M$

Montrer que pour tout réel x, on a : $\left| f(x) - \frac{x}{3} f'(x) \right| \leq \lambda M \left| x \right|$.

Déterminer la meilleure constante possible λ.

Exercice n° 6

Soient $X = (X_1, ..., X_n)$ et $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ deux suites indépendantes de variables de Bernoulli de même paramètre λ, où $0 < \lambda \leq 1/2$. On a :

$$\lambda = P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - P(Y_i = 0).$$

On note L_n la longueur de la plus grande suite Z commune à X et Y.

L'ordre des valeurs dans une suite ne peut pas être changé. Il est possible d'introduire des cases vides entre les valeurs d'une suite pour obtenir la plus grande suite commune. Plusieurs suites - peuvent convenir.

Par exemple, pour n=9, si X=(0 0 0 1 0 0 1 0 0) et Y= (0 0 1 0 0 0 0 1 0), on peut noter :

X=	0	0	0	1	0	0			1	0	0
Y=	0	0		1	0	0	0	0	1	0	
Z=	0	0		1	0	0			1	0	

Et $L_n = 7$.

1. Pour n=2, calculer l'espérance de L_2 en fonction de λ.

2. Pour quelle valeur de λ, l'espérance de L_2 est-elle minimale ?

3. Quelle est la probabilité que $L_n = n$, sachant que la suite X est fixée avec uniquement trois 1 et que Y a aussi uniquement trois 1 (n>3) ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Le candidat résumera en 200 mots (réduction au 1/10ème) le texte suivant de Valéry Ridde et Karl Blanchet publié en 2008 dans la Revue Humanitaire. Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.

Vers la gratuité des soins en Afrique ?

« Lorsque j'ai reçu une ordonnance, le médecin m'a dit "tant que tu n'auras pas payé, nous allons t'emprisonner" », raconte Christine, une jeune Burundaise de 18 ans. Dans ce petit pays voisin du Rwanda, des dizaines de malades ont ainsi été séquestrés plusieurs jours voire plusieurs semaines. Ce sont les gardiens des hôpitaux, salariés de sociétés de gardiennage privées, qui se chargent de faire respecter la règle. Dans d'autres pays où certains patients s'enfuient la nuit car ils ne peuvent pas régler les frais (les infirmiers les appellent les « évadés »), on confisque les pièces d'identité pour les obliger à revenir payer. Des cartons entiers de ces documents peuvent ainsi s'entasser dans les bureaux des centres médicaux. Au Burkina Faso, pour que les patients n'oublient pas de s'acquitter de leur dû, on peut lire « Pour la santé soyons prêts à payer le prix » sur les murs des dispensaires comme celui de Bindi situé au nord du pays.

« Si tu pars au centre de santé, explique Mariam Ouedraogao qui vit dans un village reculé à l'est de Ouagadougou, le papier que tu dois prendre afin qu'on regarde de quoi tu souffres, ça coûte 200 francs CFA. Tu prends ce papier avant qu'on ne te consulte. Si on te consulte et on voit ta maladie, pour te soigner, on te donne un autre papier, une ordonnance, pour que tu achètes des médicaments. En ce moment si tu n'as pas d'argent, tu vas rester à la maison pour te soigner. C'est ce qui fait que les centres de santé, « c'est pas tout le monde qui y va ».

Un système inégalitaire

En effet, contrairement à la plupart des pays riches, en Afrique, les patients doivent payer la totalité des coûts sans qu'aucun système d'assurance ne rembourse leurs frais. Depuis les années 1980, les systèmes de soins africains reposent sur le paiement direct des prestations par le patient et non plus sur la gratuité, comme dans les années qui ont suivi les indépendances. Mise en place sous l'impulsion des bailleurs de fonds (FMI, Banque mondiale, etc.), cette politique a bénéficié de la complicité de ceux que la chercheuse américaine Merilee Grindle nomme les « acolytes nationaux ». Les élites locales « se soignent toutes dans le privé et souvent à l'étranger ; elles n'accordent aucune priorité réelle à la santé publique ».

L'expérience a montré que le paiement direct ne permet pas d'entretenir les systèmes de santé en Afrique. Pis, il constituerait même une barrière empêchant les plus pauvres de se soigner. Selon la Banque mondiale elle-même, il ne couvrirait que 5 à 10 % des besoins. Les populations les plus malades – qui sont souvent aussi les plus miséreuses – financent ainsi, en partie, le système de santé. Or les principes de solidarité et d'équité voudraient que l'on tienne compte de la « capacité à payer » des populations. En Sierra Leone, les milieux modestes consacrent 25 % de leurs revenus aux dépenses médicales tandis que les plus riches seulement 3,7 %. Dix à trente pour cent de la population du continent africain n'auraient pas accès aux soins pour des raisons budgétaires. Ils seront « toujours arrêtés à la porte » nous disait un paysan du Burkina. En outre, un grand nombre de personnes s'endettent pour payer leurs ordonnances ou sont obligés de vendre leurs animaux ou leurs récoltes. C'est ce que l'on appelle des « dépenses catastrophiques » qui appauvrissent encore les pauvres lorsqu'ils tombent malades. La proportion des ménages qui doivent effectuer de tels déboursements catastrophiques est de 1,3 % en France contre 8,5 % au Malawi, par exemple.

La Banque mondiale fait marche arrière

Dans les pays qui ont instauré un système de santé largement financé par le public (à travers les cotisations, les taxes ou les impôts), il demeure relativement aisé de se faire soigner lorsque l'on ne dispose pas d'argent. Mais en Afrique où les revenus fiscaux sont faibles et le financement de la santé majoritairement d'origine privée, la collectivité laisse les patients seuls face à leurs besoins. L'aide internationale, qui n'a pourtant jamais été aussi importante dans ce secteur – elle est passée de 6 milliards de dollars en 2000 à 14 milliards en 2005 – se révèle insuffisante pour répondre à la demande. Les Objectifs du Millénaire pour le Développement (OMD) ne seront d'ailleurs pas atteints. L'aide paraît en effet trop concentrée sur la lutte contre des maladies spécifiques (sida, tuberculose, etc.) et pas assez sur le renforcement des systèmes de santé dans leur ensemble.

C'est pourquoi, après avoir pendant 20 ans demandé aux patients de payer lorsqu'ils consultent, les pouvoirs publics nationaux et mondiaux semblent amorcer un changement de cap. Même la Banque mondiale qui a été le plus ardent défenseur de l'imposition du paiement direct des soins dans les années 1980 et 1990, semble changer d'avis. Dans sa nouvelle politique de santé promue en 2007, elle affirme qu'elle soutiendra les pays qui décident d'abolir le paiement direct. De même, en juin 2007, la directrice générale de l'Organisation mondiale de la santé (OMS) abondait en se sens : « Si vous voulez réduire la pauvreté, cela me paraît censé d'aider les gouvernements à abolir le paiement ». En outre, nous avons pu observer comment, discrètement, sur le terrain, le bureau d'aide humanitaire de la Commission européenne appuie des associations qui mettent en place la gratuité des soins en Afrique. Mais les fonctionnaires de l'aide au développement à Bruxelles ne semblent pas tous d'accord. Pourtant, selon le chercheur britannique Chris James, l'abolition du paiement des soins pour les enfants de moins de 5 ans dans 20 pays d'Afrique sub-saharienne pourrait sauver de 150 000 à 300 000 vies.

Certains gouvernements africains semblent acquis à une réorientation des politiques de santé. Ainsi, l'Afrique du Sud ou l'Ouganda en sont maintenant à plusieurs années d'expériences en ce sens. Plus récemment, le Sénégal a rendu gratuits les soins donnés aux personnes âgées ; au Mali ce sont les césariennes ; au Niger, les consultations pour les enfants de moins de 5 ans ; au Burkina Faso les accouchements sont subventionnés à 80 % par l'Etat. Dans tous ces pays, les effets sont immédiats et le nombre de consultations a augmenté parfois de manière exponentielle. Mais ce virage n'a pas toujours été bien préparé : les décisions ont été prises rapidement sans laisser aux techniciens le temps de s'adapter. En effet, c'est souvent sous l'effet de crises majeures que la suppression du paiement direct s'est imposée : les détentions de patients au Burundi, la crise alimentaire au Niger, ou le blocus économique et politique à Madagascar.

Les freins au changement

Cependant, des réticences se manifestent. Ainsi, Drissa, infirmier rencontré dans un dispensaire au Niger se montre amer : « J'ai l'impression que le Niger est devenu un laboratoire pour tester tous les systèmes, un pays cobaye ». On s'inquiète du financement, du manque de préparation, du besoin de suivre et d'évaluer l'introduction d'un tel changement, ou encore de sa pérennité. Au Niger, le ministère des Finances renâcle : « Quand ça arrive au Trésor, on a l'impression que ce n'est plus une priorité nationale » nous dit un représentant d'une agence internationale de coopération. Prudemment, le Burkina Faso s'est borné, en janvier 2008, à la réduction – et non pas la suppression – du paiement des traitements des antirétroviraux, en attendant que la question de la gratuité trouve réponse dans la durabilité des financements requis. Pourtant, ces traitements sont gratuits dans tous les pays de la région et l'expérience a montré, au Sénégal par exemple, que cette pratique ne rendait pas, contrairement aux idées reçues, les patients moins motivés dans le suivi de leur traitement.

Mais certains villageois, quant à eux, ne comprennent pas les nouvelles directives. Dans les années 1980, l'idée de la participation communautaire visait à confier aux paysans le contrôle des centres de santé par la mise en place de comités de gestion. Ce système n'a jamais vraiment fonctionné et la participation s'est limitée à une contribution financière. Aussi, les paysans ont pris l'habitude de payer. Aujourd'hui, les responsables communautaires ne comprennent pas pourquoi on leur demande de supprimer cette pratique qui alimente les caisses des dispensaires où dormiraient des millions de francs CFA. Mais ces sommes n'ont jamais été utilisées pour améliorer l'accès aux soins des plus pauvres, accroissant ainsi les inégalités entre ceux qui peuvent payer et ceux qui n'en ont pas les moyens. Au Niger par exemple, seulement 4% des femmes les plus pauvres accouchent avec l'aide d'un personnel médical qualifié contre 63% de leurs consœurs des ménages riches. De surcroît, les villageois se souviennent des années 1960 et 1970 quand la gratuité signifiait absence de médicaments et mauvaise qualité des soins.

Certains soulignent que le terme « gratuité » est un abus de langage médiatique. En effet, même si l'acte médical n'est plus payant, le patient devra toujours financer le transport, le temps perdu, l'alimentation des accompagnants et tous les autres frais indirects. À la lumière de l'expérience ghanéenne, on s'interroge ainsi sur les réels bénéficiaires des nouvelles politiques. Dans ce pays d'Afrique de l'Ouest, des chercheurs ont observé que les interventions de santé publique universelles ne profitent pas, dans un premier temps, aux plus pauvres mais d'abord aux plus riches. Les plus pauvres vivent souvent loin des villes et des centres de santé et l'information sur l'existence de nouveaux services leur parvient difficilement. Les plus riches qui sont aussi les plus éduqués sont les premiers à avoir les moyens d'adopter de nouveaux comportements favorables à la santé. Ajoutons que les infirmiers qui bénéficient dans certains pays de ristournes sur ces paiements ne sont pas très heureux non plus. Pour un certain nombre d'entre eux, les paiements directs sont un moyen commode d'arrondir les fins de mois de leurs maigres salaires, par des pratiques qualifiées pudiquement de « paiement informel ». Enfin, la dernière difficulté à surmonter est évidemment celle du financement. La plupart de ces politiques d'exemption sont financées directement ou indirectement par les bailleurs de fonds internationaux. La « mode » passée, poursuivront-ils ? À quand le prochain revirement de politique ? Les Etats africains vont-ils enfin, à l'aune de ces expériences, accorder un budget décent à la santé ? Abolir le paiement ne suffit pas : il faut aussi investir dans l'amélioration conséquente de l'offre de soins et payer des salaires décents aux professionnels de la santé pour éviter, notamment, la fuite des cerveaux. La déclaration d'Abuja et l'engagement des États de consacrer au moins 15 % de leur budget à la santé n'a été respectée que par une minorité de pays tel que le Ghana par exemple.

Au nom de la reconnaissance grandissante du droit à la santé, des luttes associatives pour l'accès aux médicaments antirétroviraux et de l'accès aux soins comme nouveau bien public mondial, les bailleurs de fonds et les responsables politiques africains commencent à reconsidérer l'accès aux soins des plus pauvres. Mais la vigilance s'impose. Si la Société financière internationale, associée à la Banque mondiale, recommande dans son dernier rapport l'investissement dans le secteur privé de la santé en Afrique, elle annonce la couleur en évoquant le « business de la santé en Afrique ». Sont-ce là les prémices d'une nouvelle vague de réformes ?

Valéry Ridde et Karl Blanchet

Revue Humanitaire

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice I

1. Soit $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Trouver un polynôme $P_2(x)$ qui approxime $f(x)$ pour x dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et démontrer que l'erreur d'approximation $f(x) - P_2(x)$ vérifie

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{2}, \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

2. Soit f une fonction réelle deux fois continûment dérivable sur $]-1, 1[$, telle que $f(0) = 0$. Déterminer

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{k=1}^{[\frac{1}{\sqrt{x}}]} f(kx),$$

où $[z]$ désigne la partie entière d'un nombre réel z.

3. Prouver que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment dérivable, telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$, on a alors, pour tout a nombre réel,

$$\lim_{x \to \infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)^x = \exp\left(-\frac{a^2}{2} \right).$$

Exercice II

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble de matrices carrés de dimension 3 à éléments réels et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable et, si oui, donner la matrice diagonale ainsi que la matrice de passage.
2. Trouver toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$B^2 = A \quad \text{et} \quad tr(B) = 0,$$

   où tr désigne la trace.

Exercice III

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, a, b, $c \in \mathbb{C}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{pmatrix}$$

appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que $n = 3$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A, en discutant selon les valeurs de a, b et c.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ quelconque, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A, en résolvant l'équation $AX = \lambda X$, pour un vecteur X de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice IV

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et donner une relation de récurrence pour calculer I_{n+1} avec $n \in \mathbb{N}$.
2. Notons par $\hat{I}_0$ l'approximation numérique de I_0 et supposons que $\hat{I}_n$ est calculé à partir de $\hat{I}_0$ par la même relation de récurrence que I_n à partir de I_0. Soit $\epsilon_n = |I_n - \hat{I}_n|$ l'erreur d'approximation, pour tout n entier positif.

   Trouver une relation de récurrence pour la suite ϵ_n. De combien serait l'erreur ϵ_{10} si l'erreur initiale est $\epsilon_0 = 5 \cdot 10^{-5}$? Comment s'exprime ϵ_{10} en fonction de ϵ_{20} ? Que suggérez-vous ?
3. Montrer que

   $$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10(n+1)(n+2)},$$

   et, en déduire que

   $$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{11(n+1)} + \frac{1}{110(n+1)(n+2)}.$$

   De quel ordre est ϵ_n et l'erreur relative ϵ_n / I_n ?